

Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Кафедра небесной механики

Микрюков Денис Викторович

Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона

в гелиоцентрической системе отсчета

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., заведующий Кафедрой небесной  
механики, профессор Холшевников К.В.

Рецензент:

д.ф.-м.н., доцент УрФУ Кузнецов Э.Д.

Санкт-Петербург

2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics & Mechanics Faculty

Celestial Mechanics Chair

Mikryukov Denis Viktorovich

Expansion of the planetary Hamiltonian into a Poisson series  
in a heliocentric reference frame

Final qualifying work

Scientific supervisor:

Head of Celestial Mechanics Chair,  
Professor K.V. Kholshchevnikov

Reviewer:

Associated Professor E.D. Kuznetsov

Saint-Petersburg

2016

# Содержание

<b>1 ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>4</b>
<b>2 ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ</b>	<b>6</b>
2.1 Гелиоцентрические координаты . . . . .	6
2.2 Кинетическая и потенциальная энергия . . . . .	8
2.3 Уравнения Лагранжа и функция Гамильтона . . . . .	10
2.4 Системы оскулирующих элементов . . . . .	11
2.5 Разложение гамильтониана . . . . .	13
2.5.1 Разложение дополнительной части возмущающей функции . . . . .	14
2.5.2 Разложение главной части возмущающей функции . . . . .	14
2.5.3 Вычислительный алгоритм разложения функции $a'/\Delta$ . . . . .	16
2.6 Программное обеспечение для построения разложений . . . . .	20
2.6.1 Модуль M_KEPLER.py . . . . .	20
2.6.2 Модуль M_POISSON.py . . . . .	21
2.6.3 Модуль M_LAPLACE.py . . . . .	21
2.7 Результаты . . . . .	23
2.8 Обсуждение результатов . . . . .	25
<b>3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>26</b>
<b>4 ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ</b>	<b>26</b>
Список литературы	27
Приложение А	29
Приложение Б	30
Приложение В	31
Приложение Г	32
Приложение Д	33

# 1 ВВЕДЕНИЕ

При решении задачи нескольких тел основными используемыми системами отсчета являются система координат Якоби и гелиоцентрическая система координат [14].

Первая является наиболее удобной для теоретического изучения задачи трех тел, например, для описания системы Солнце — Земля — Луна [14]. Однако в случае большого числа планет якобиевы координаты громоздки, так как положение каждого тела определяется положением всей предыдущей подсистемы тел [6]. Это приводит к необходимости разложения возмущающего потенциала системы в ряд по степеням малого параметра [19].

При изучении планетного движения гелиоцентрические координаты оказываются более удобными в практическом отношении. При любом числе планет главная часть возмущающей функции представляется суммой слагаемых, каждое из которых зависит от положения лишь пары планет [15].

*Терминологическое замечание.* Во многих исследованиях, посвященных построению планетных теорий [6, 9, 17], авторы используют при составлении исходных уравнений движения гамильтонов подход и вводят систему обобщенных координат и импульсов, которую называют *каноническими гелиоцентрическими* координатами<sup>1</sup>. Эта система канонических координат была впервые рассмотрена Пуанкаре. Она определяется с помощью классических декартовых координат и ньютоновских импульсов (произведение массы тела на его скорость) в фиксированной инерциальной (абсолютной) системе отсчета. Именно, если в системе, состоящей из Солнца и  $N$  планет, обозначить радиус-вектор Солнца, отнесенный к абсолютным осям, как  $\mathbf{X}_0$ , а абсолютные радиусы-векторы планет как  $\mathbf{X}_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ), то за обобщенные координаты  $\mathbf{u}_k$  принимаются координаты всех планет, отнесенные к Солнцу:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_0, \quad k = 1, \dots, N.$$

За сопряженные обобщенные импульсы  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  по построению берут  $N$  соответствующих ньютоновских импульсов этих планет

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \mathbf{P}_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

отнесенных к абсолютным осям. Для доопределения системы координат (система содержит  $N + 1$  тело) вводится еще одна пара координата-импульс, за которые по построению

---

<sup>1</sup>В литературе также используются названия *канонические относительные* координаты [6], а также *канонические астроцентрические* координаты [13].

полагают соответственно радиус–вектор Солнца и полный ньютоновский импульс материальной системы в абсолютной системе отсчета:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{X}_0, \quad \tilde{\mathbf{u}}_0 = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}_k.$$

При указанном выборе обобщенных координат и импульсов уравнения движения системы могут быть записаны в гамильтоновой форме и положены в основу всего дальнейшего построения планетной теории.

В настоящей работе предлагается метод исследования планетных орбит, в котором движение каждого тела рассматривается также в гелиоцентрической системе отсчета, но в основу которого положен лагранжев подход при составлении исходных уравнений. А именно, для описания материальной системы используются гелиоцентрические координаты и производные этих координат по времени.

Фундаментальным этапом построения теории планетного движения (в любой системе координат) является разложение гамильтониана системы в ряд при помощи базовых функций. Чаще всего — это ряд Пуассона. Выбор метода разложения определяется особенностями и условиями рассматриваемой задачей. Наиболее трудоемким шагом (в любом методе) является разложение величины обратного расстояния между двумя планетами, входящей в главную часть возмущающей функции [8, 12].

Со времен Эйлера было предложено множество способов разложения возмущающей функции системы. Одним из наиболее известных способов представления главной части является разложение с помощью полиномов Лежандра [11]. Метод эффективен, если отношение расстояний возмущаемого и возмущающего тел до центрального является малым [17]. В другом классическом методе применяются коэффициенты Лапласа (частный случай функций Пуассона [21]). Как отмечается в работе [17], использующий коэффициенты Лапласа метод можно употреблять в большем числе случаев по сравнению с методом, опирающимся на полиномы Лежандра.

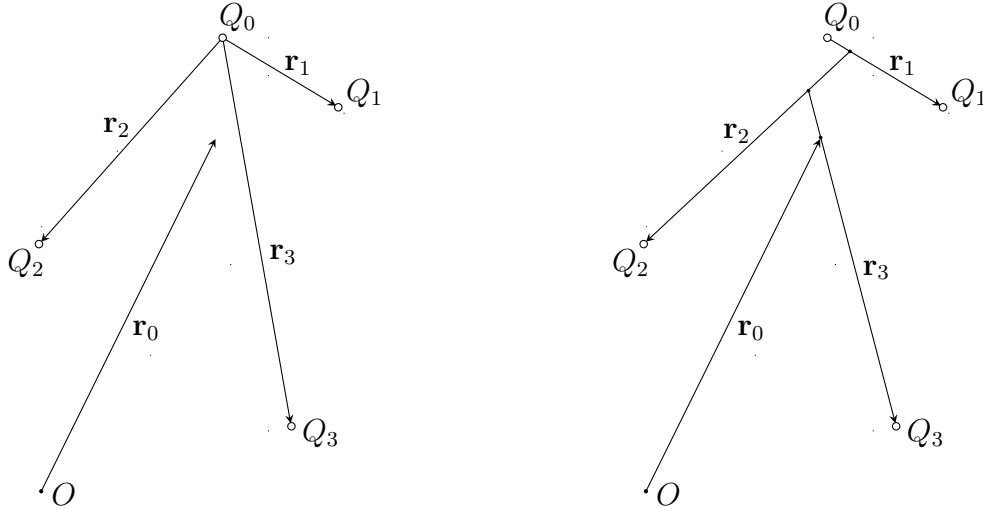
В любом способе, использующем ряды по степеням эксцентриситетов и наклонов (или по степеням величин порядка эксцентриситета и наклона), последние должны быть малы. При достижении значений  $0.2 \div 0.3$  соответствующий ряд может расходиться [16, 20]. В настоящей работе для разложения главной части возмущающей функции мы используем эффективный метод, опирающийся на коэффициенты Лапласа [8]. Этот метод может быть применен для исследования эволюции орбит, близких к круговым и компланарным.

## 2 ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

### 2.1 Гелиоцентрические координаты

Следуя Уинтнеру [15], введем в употребление гелиоцентрическую систему координат. Будем придерживаться системы обозначений, принятой в работе [19]. В этой работе используется система координат Якоби. В одинаковой системе обозначений удобно сравнивать выражения одной и той же физической величины в разных системах отсчета.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  находятся материальные точки  $Q_0$  (“Солнце”) с массой  $m_0$  и  $Q_k$  (“планеты”) с массами  $\mu m_k m_0$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Величина  $m_0$  имеет размерность массы,  $m_k$  и  $\mu$  полагаются безразмерными. “Массовый множитель”  $m_k$  имеет порядок единицы,  $\mu$  — малый параметр. На практике за  $\mu$  обычно берут отношение массы самой массивной планеты к массе центральной звезды или отношение суммы масс всех планет к массе звезды. В последнем случае  $m_k < 1$  для всех  $k$ . При исследовании Солнечной системы обычно принимают  $\mu = 10^{-3}$ . Такой выбор обозначений планетных масс связан с тем, что в большинстве известных планетных систем массы планет существенно меньше массы центральной звезды и в то же время сравнимы между собой.



Гелиоцентрические (слева) и якобиевы (справа) координаты для одной и той же конфигурации, состоящей из четырех тел

Введем декартову инерциальную систему координат с началом в точке  $O$ . Положение тел  $Q_0$  и  $Q_k$  определим в ней соответственно радиусами-векторами  $\rho_0$  и  $\rho_k$ . Векторы

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ , определяющие соответственно положения “планет”  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  относительно “Солнца”  $Q_0$ , называются по определению гелиоцентрическими координатами.

Если мы задаем систему гелиоцентрических координат таким образом, то  $N + 1$  вектор  $\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_N$  заменяется лишь на  $N$  векторов  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ . Для невырожденности преобразования, следуя монографии [15], добавим к координатам планет относительно Солнца абсолютные координаты центра масс системы<sup>2</sup>. В результате система гелиоцентрических координат определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \frac{1}{\tilde{m}} \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{\mu}{\tilde{m}} \sum_{j=1}^N m_j \boldsymbol{\rho}_j, \\ \mathbf{r}_k &= \boldsymbol{\rho}_k - \boldsymbol{\rho}_0, \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\tilde{m} = 1 + \mu t_1 + \dots + \mu t_N$ , а  $\mathbf{r}_0$  — вектор, определяющий положение центра масс системы относительно точки  $O$ . Из определения используемых в работе [19] координат Якоби (см. формулы (П1) в Приложении А, а также общее определение координат Якоби в руководствах [5, 14]) и определения гелиоцентрических координат (1) следует, что векторы  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$  в обеих системах имеют одинаковый смысл (см. рисунок).

Преобразование (1) является линейным с постоянными зависящими лишь от масс коэффициентами. Определитель  $D_H$  системы (1) не изменится, если к первому столбцу прибавить сумму всех остальных столбцов:

$$D_H = \begin{vmatrix} \frac{1}{\tilde{m}} & \frac{\mu t_1}{\tilde{m}} & \frac{\mu t_2}{\tilde{m}} & \dots & \frac{\mu t_{N-1}}{\tilde{m}} & \frac{\mu t_N}{\tilde{m}} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\mu t_1}{\tilde{m}} & \frac{\mu t_2}{\tilde{m}} & \dots & \frac{\mu t_{N-1}}{\tilde{m}} & \frac{\mu t_N}{\tilde{m}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно,  $D_H = 1$  и преобразование (1) неособое.

---

<sup>2</sup>В работе [19] при переходе от абсолютных координат к якобиевым возникает такое же затруднение:  $N + 1$  вектор заменяется лишь на  $N$  векторов. Оно также разрешается путем учета радиуса-вектора барицентра системы в абсолютной системе отсчета.

*Замечание.* В работе [19] рассматривается аналогичное преобразование абсолютных координат  $\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_N$  к якобиевым и утверждается, что его определитель  $D_J$  также равен единице. Доказать это утверждение можно также прибавлением в определителе к первому столбцу всех остальных столбцов. Доказательство мы приводим в Приложении А.

Обратное к (1) преобразование выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_0 &= \mathbf{r}_0 - \frac{\mu}{\tilde{m}} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j, \\ \boldsymbol{\rho}_k &= \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_0 - \frac{\mu}{\tilde{m}} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j, \quad k = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{2}$$

Элементарный вывод соотношений (2) из (1) приведен в [15].

Важно, что разности гелиоцентрических (как и якобиевых [19]) координат не зависят от  $\mathbf{r}_0$ . Более того, разности абсолютных и гелиоцентрических координат для произвольной пары планет совпадают:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_k - \boldsymbol{\rho}_0 &= \mathbf{r}_k, & 1 \leq k \leq N, \\ \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_k &= \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k, & 1 \leq k < j \leq N.\end{aligned}\tag{3}$$

## 2.2 Кинетическая и потенциальная энергия

Для записи уравнений Лагранжа и функции Гамильтона необходимо определить кинетическую и потенциальную энергию системы в гелиоцентрических координатах.

Будем использовать следующие удобные обозначения знаков сумм:

$$\sum_1 = \sum_{k=1}^N, \quad \sum_2 = \sum_{1 \leq j < k \leq N}.$$

Считаем, что пробегаемые индексы стоящих внутри этих сумм величин могут обозначаться различными буквами.

Для кинетической энергии  $\mathcal{E}_1$  по определению имеем

$$2\mathcal{E}_1 = m_0 \dot{\boldsymbol{\rho}}_0^2 + \mu m_0 \sum_1 m_k \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^2.$$

Подстановка (2) после преобразований приводит к представлению

$$2\mathcal{E}_1 = \tilde{m} m_0 \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \mu m_0 \sum_1 m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 - \frac{\mu^2 m_0}{\tilde{m}} \left( \sum_1 m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^2.\tag{4}$$



Квадрат суммы можно раскрыть следующим образом:

$$\left(\sum_1 m_k \dot{\mathbf{r}}_k\right)^2 = \sum_1 m_k^2 \dot{\mathbf{r}}_k^2 + 2 \sum_2 m_j m_k \dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_k. \quad (5)$$

Приведем для сравнения выражение кинетической энергии в координатах Якоби [19]:

$$2\mathcal{E}_1 = \tilde{m} m_0 \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \mu m_0 \sum_1 \frac{m_k \tilde{m}_{k-1}}{\tilde{m}_k} \dot{\mathbf{r}}_k^2,$$

где  $\tilde{m}_0 = 1$ ,  $\tilde{m}_k = 1 + \mu m_1 + \dots + \mu m_k$ .

Как и в координатах Якоби, в гелиоцентрической системе отсчета  $\dot{\mathbf{r}}_0$  входит в  $\mathcal{E}_1$  только через слагаемое, пропорциональное  $\dot{\mathbf{r}}_0^2$ . Однако остальные скорости входят не только квадратами, но и попарными произведениями  $\dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_k$ , что является недостатком гелиоцентрических координат.

Потенциальную энергию  $\mathcal{E}_2$  удобно представить в виде суммы двух частей. Первая определяется взаимодействием планет с Солнцем, а вторая — взаимодействием планет друг с другом:

$$-\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{G}m_0^2} = \mu \sum_1 \frac{m_k}{|\boldsymbol{\rho}_k - \boldsymbol{\rho}_0|} + \mu^2 \sum_2 \frac{m_j m_k}{|\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_k|},$$

где  $\mathcal{G}$  — постоянная тяготения. Если массы планет малы по сравнению с массой Солнца (а мы только такие системы и рассматриваем), то второе слагаемое в этом выражении мало по сравнению с первым.

Согласно (3), переход от координат  $\boldsymbol{\rho}$  к  $\mathbf{r}$  дает

$$-\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{G}m_0^2} = \mu \sum_1 \frac{m_k}{r_k} + \mu^2 \sum_2 \frac{m_j m_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}, \quad r_k = |\mathbf{r}_k|. \quad (6)$$

Представление потенциальной энергии в координатах Якоби [19] имеет более сложный вид по сравнению с (6): разность радиусов-векторов  $\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_k$  в общем случае зависит (линейно) также от положения промежуточных тел (см. формулы (3) в работе [19]). Например, в выражение  $\boldsymbol{\rho}_5 - \boldsymbol{\rho}_2$ , помимо  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_5$ , входят векторы  $\mathbf{r}_3$  и  $\mathbf{r}_4$ :

$$\boldsymbol{\rho}_5 - \boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{r}_5 + \mu \frac{m_4}{\tilde{m}_4} \mathbf{r}_4 + \mu \frac{m_3}{\tilde{m}_3} \mathbf{r}_3 - \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{m}_2} \mathbf{r}_2.$$

Итак, можно сделать вывод, что кинетическая энергия имеет более простой и удобный вид в якобиевой системе координат, а потенциальная — в гелиоцентрической.

## 2.3 Уравнения Лагранжа и функция Гамильтона

Действующие на планеты силы обусловлены стационарным потенциальным полем. Кинетическая энергия  $\mathcal{E}_1$  представляется однородной квадратичной формой скоростей (4) с постоянными (зависящими лишь от масс) коэффициентами. Согласно [2], функции Лагранжа и Гамильтона в этом случае определяются соответственно равенствами  $\mathcal{L} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{H} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ , а классические уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_s} = 0, \quad s = 1, \dots, 3N + 3. \quad (7)$$

В этой системе второго порядка с  $3N + 3$  степенями свободы за обобщенные координаты  $q_s$  принимаются координаты всех  $N + 1$  гелиоцентрических векторов  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ .

Компоненты вектора  $\mathbf{r}_0$  являются циклическими координатами. Кинетическая энергия  $\mathcal{E}_1$  не зависит от координат, а потенциальная энергия  $\mathcal{E}_2$  — от скоростей. Поэтому уравнения Лагранжа (7) расщепляются на систему

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial \dot{q}_s} \right) = - \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial q_s}, \quad s = 1, \dots, 3N, \quad (8)$$

записанную для координат векторов  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ , и на одно векторное уравнение  $\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$ . Последнее равенство означает равномерное и прямолинейное движение центра масс системы в инерциальном пространстве.

Поведение планет описывается замкнутой системой (8), причем первое слагаемое справа в (4) можно опустить как не влияющее на уравнения движения. Далее, соотношения (8) в силу их однородности можно сократить на постоянный множитель  $\mu m_0$ , что равносильно замене  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  соответственно функциями  $\mathcal{E}_3$  и  $\mathcal{E}_4$ :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_3 &= \sum_1 m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 - \frac{\mu}{\widetilde{m}} \left( \sum_1 m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^2, \\ -\frac{\mathcal{E}_4}{\mathcal{G}m_0} &= \sum_1 \frac{m_k}{r_k} + \mu \sum_2 \frac{m_j m_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом гамильтониан системы принимает вид  $h = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$ .

Представим функцию Гамильтона  $h$  стандартной суммой невозмущенного и возмущающего гамильтониана. Как показывают соотношения (9), такое представление можно осуществить двумя способами.

Во-первых, можно положить

$$h = \widetilde{h}_0 + \mu \widetilde{h}_1, \quad (10)$$

где невозмущенная часть  $\tilde{h}_0$  и возмущающая  $\mu\tilde{h}_1$  определяются равенствами

$$\begin{aligned}\tilde{h}_0 &= \sum_1 m_k \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}_k^2}{2} - \frac{\varkappa^2}{r_k} \right), \quad \varkappa^2 = \mathcal{G}m_0, \quad \varkappa > 0, \\ \tilde{h}_1 &= -\frac{1}{2\tilde{m}} \left( \sum_1 m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^2 - \varkappa^2 \sum_2 \frac{m_j m_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}.\end{aligned}\tag{11}$$

Во-вторых, можно раскрыть с помощью (5) квадрат суммы в (9):

$$2\mathcal{E}_3 = \sum_1 \left( 1 - \frac{\mu m_k}{\tilde{m}} \right) m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 - \frac{2\mu}{\tilde{m}} \sum_2 m_j m_k \dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_k,$$

после чего представить  $h$  в виде

$$h = h_0 + \mu h_1,\tag{12}$$

где невозмущенный гамильтониан  $h_0$  и возмущающий  $\mu h_1$  имеют вид

$$\begin{aligned}h_0 &= \sum_1 \beta_k \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}_k^2}{2} - \frac{\varkappa_k^2}{r_k} \right), \\ h_1 &= -\sum_2 m_j m_k \left( \frac{\varkappa^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} + \frac{\dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_k}{\tilde{m}} \right).\end{aligned}\tag{13}$$

В последних равенствах положено

$$\begin{aligned}\beta_k &= m_k \left( 1 - \frac{\mu m_k}{\tilde{m}} \right), \\ \varkappa_k^2 &= \varkappa^2 \left( 1 - \frac{\mu m_k}{\tilde{m}} \right)^{-1} = \varkappa^2 \frac{\tilde{m}}{\tilde{m} - \mu m_k},\end{aligned}\tag{14}$$

причем величину  $\mu$  в (14) следует считать данным числом, а не параметром.

В уравнениях (11) гравитационный параметр  $\varkappa^2$  не зависит от массы  $k$ -ого тела. В уравнениях же (13) параметр  $\varkappa_k^2$  для каждой планеты имеет свое определенное значение.

Оба представления гамильтониана (10) и (12) можно использовать на практике, однако далее мы будем работать с более удобным с физической точки зрения представлением (12).

## 2.4 Системы оскулирующих элементов

Если массами планет можно пренебречь по сравнению с массой Солнца, а взаимные расстояния между планетами имеют положительную нижнюю границу, то в (12) можно положить  $\mu = 0$ . Задача планетного гелиоцентрического движения сводится к задаче о движении каждой планеты в статическом гравитационном поле Солнца:

$$\ddot{\mathbf{r}}_s + \varkappa_s^2 \frac{\mathbf{r}_s}{r_s^3} = 0, \quad s = 1, \dots, N.\tag{15}$$

Уравнения (15) соответствуют  $N$  независимым задачам одного притягивающего центра, каждая со своим гравитационным параметром  $\kappa_s^2$ . Решение каждой задачи дает шесть постоянных интегрирования, в качестве которых обычно выбирают кеплеровы элементы соответствующей орбиты или различные системы канонических элементов.

Для большой полуоси, эксцентриситета и наклона орбиты будем использовать стандартные обозначения  $a, e, i$ . Среднюю аномалию, аргумент перицентра и долготу восходящего узла обозначим через  $M, g, \Omega$ .

Для планетных задач характерна малость эксцентриситетов и наклонов. В этом случае подходящей канонической системой является вторая система элементов Пуанкаре [5, 14]

$$\begin{aligned} L &= \beta \kappa \sqrt{a}, & \lambda &= M + \tilde{g}, \\ \xi_1 &= \sqrt{2L} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} \cos \tilde{g}, & \eta_1 &= -\sqrt{2L} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} \sin \tilde{g}, \\ \xi_2 &= \sqrt{2L} \sqrt[4]{1 - e^2} \sqrt{1 - \cos i} \cos \Omega, & \eta_2 &= -\sqrt{2L} \sqrt[4]{1 - e^2} \sqrt{1 - \cos i} \sin \Omega, \end{aligned} \quad (16)$$

где через  $\tilde{g} = g + \Omega$  обозначена долгота перицентра. Величины  $\xi_1$  и  $\eta_1$  называются эксцентрическими элементами, а  $\xi_2$  и  $\eta_2$  — облическими (связанными с наклоном) элементами.

Вместо элементов (16) далее будем использовать систему модифицированных (комплексных) элементов Пуанкаре [8, 10], определяемую равенствами<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} L' &= L, & \lambda' &= \lambda, \\ \xi'_1 &= \mathcal{X}, & \eta'_1 &= -i\bar{\mathcal{X}}, \\ \xi'_2 &= \mathcal{Y}, & \eta'_2 &= -i\bar{\mathcal{Y}}, \end{aligned} \quad (17)$$

в которых

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \sqrt{L'} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} e^{i\tilde{g}}, \\ \mathcal{Y} &= \sqrt{L'} \sqrt[4]{1 - e^2} \sqrt{1 - \cos i} e^{i\Omega}, \end{aligned}$$

$e$  — неперово число и  $i$  — мнимая единица.

Элементы (17) можно назвать комплексной формой канонических элементов Пуанкаре (16). Однако их следует отличать от используемой в работе [6] системы комплексных переменных Пуанкаре — Харцера

$$\begin{aligned} L'' &= L, & \lambda'' &= i\lambda, \\ \xi''_1 &= \mathcal{X}, & \eta''_1 &= \bar{\mathcal{X}}, \\ \xi''_2 &= \mathcal{Y}, & \eta''_2 &= \bar{\mathcal{Y}}, \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Чертой сверху мы везде обозначаем комплексное сопряжение.

в которой за сопряженный к  $L$  элемент вместо  $\lambda$  принимается  $i\lambda$ .

*Замечание.* В любой системе элементов оскулирующие элементы каждой  $s$ -й планеты (включая величины  $\beta$  и  $\varkappa$ ) снабжаются соответствующим индексом  $s$ .

Согласно работам [8, 10], основные разложения кеплеровского движения удобно строить по степеням безразмерных величин

$$\begin{aligned} X &= \xi'_1 \sqrt{\frac{2}{L'}}, & \bar{X} &= i\eta'_1 \sqrt{\frac{2}{L'}}, \\ Y &= \frac{\xi'_2}{\sqrt{2L'}}, & \bar{Y} &= \frac{i\eta'_2}{\sqrt{2L'}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Пара канонически сопряженных переменных  $(L', \lambda')$  тождественно совпадает с парой  $(L, \lambda)$ , поэтому в системе элементов (17) штрихи над  $L$  и  $\lambda$  далее опустим.

Система (17) имеет определенные преимущества перед классическими элементами (16). А именно, элементы (17) позволяют получить более экономные (по числу членов ряда) основные разложения кеплеровского движения при заданной точности разложения. Подробное изложение этого вопроса приведено в работе [10].

## 2.5 Разложение гамильтониана

Перейдем к разложению гамильтониана  $h$  планетной системы в ряд Пуассона по комплексным элементам Пуанкаре (17).

Согласно (13), невозмущенная часть гамильтониана  $h_0$  элементарно выражается через оскулирующие элементы:

$$h_0 = - \sum_1 \frac{\beta_s \varkappa_s^2}{2a_s} = - \sum_1 \frac{\beta_s^3 \varkappa_s^4}{2L_s^2}.$$

Величина  $h_1$  является сложной функцией всех элементов, имеющей физическую размерность квадрата скорости. Следуя [19], представим ее в виде

$$h_1 = \frac{\mathcal{G}m_0}{a_0} h_2,$$

где множитель  $\mathcal{G}m_0/a_0$  имеет размерность квадрата скорости, а  $h_2$  безразмерно. За  $a_0$  можно принять любую характерную для планетной системы имеющую размерность длины постоянную. Для Солнечной системы  $a_0$  можно положить равной астрономической единице длины. Безразмерная возмущающая функция системы  $h_2$  принимает вид

$$h_2 = - \sum_2 m_j m_k \left( \frac{a_0}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} + \frac{a_0}{\mathcal{G}m_0 \tilde{m}} \dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_k \right).$$

Представим  $h_2$  суммой  $h_3 + h_4$ , где

$$\begin{aligned} h_3 &= -a_0 \sum_2 \frac{m_j m_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}, \\ h_4 &= -\frac{a_0}{\mathcal{G} m_0 \widetilde{m}} \sum_2 m_j m_k \dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_k. \end{aligned} \quad (19)$$

Величины  $h_3$  и  $h_4$  называются соответственно главной и дополнительной частью возмущающей функции. Главная часть обусловлена прямым взаимодействием планет, а дополнительная определяется выбором системы координат. Разложение главной части представляет основную сложность при разложении  $h_2$  в ряд Пуассона. Разложение  $h_4$  выполнить намного проще и оно в своем представлении (при одной и той же точности разложения) содержит значительно меньше слагаемых.

### 2.5.1 Разложение дополнительной части возмущающей функции

Разложение дополнительной части  $h_4$  сводится к разложению скалярного произведения гелиоцентрических скоростей:  $\dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_k = \dot{x}_j \dot{x}_k + \dot{y}_j \dot{y}_k + \dot{z}_j \dot{z}_k$ .

Один из возможных методов разложения функций  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  по комплексным элементам Пуанкаре (17) приведен в [10]. В работе [8] для этой цели используются промежуточные разложения по модифицированным (комплексным) элементам Лагранжа.

### 2.5.2 Разложение главной части возмущающей функции

Разложение главной части  $h_3$  представляет собой трудоемкую операцию, так как обратное расстояние  $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^{-1}$  имеет наиболее сложную структуру в буквенных теориях классического типа.

Представим  $h_3$  в виде

$$h_3 = \sum_2 R_{jk}, \quad R_{jk} = -a_0 m_j m_k / \Delta_{jk}, \quad \Delta_{jk} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|. \quad (20)$$

Число  $\mathcal{N}$  функций  $R_{jk}$  равно числу всевозможных планетных пар в системе, то есть  $N(N-1)/2$ . Для двупланетной системы  $\mathcal{N} = 1$ , для восьмипланетной имеем  $\mathcal{N} = 28$ .

Следуя работе Ласкара и Робютеля [8], приведем метод разложения функции  $R_{jk}$  в ряд Пуассона по элементам (17). Величина  $R_{jk}$  определяется положением лишь двух планет, поэтому условимся обозначать внутреннюю и внешнюю планеты соответственно как  $Q$

и  $Q'$  и вместо  $R_{jk}$  писать  $R$ . Относящиеся к внешней планете величины будем снабжать штрихами.

Запишем функцию  $R$  в виде

$$R = -\frac{a_0 m m'}{a'} \left( \frac{a'}{\Delta} \right), \quad (21)$$

где  $\Delta = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Обозначим гелиоцентрический угол между планетами  $Q$  и  $Q'$  через  $\varphi$ . По теореме косинусов

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi,$$

где  $r = |\mathbf{r}|$ . Введем обозначения  $\sigma = r/r'$ ,  $\alpha = a/a'$ . За  $\lambda$  и  $\lambda'$  примем соответственно средние долготы планет  $Q$  и  $Q'$  в орбите. Легко убедиться, что

$$\frac{a'}{\Delta} = \frac{a'}{r'} (1 + \sigma^2 - 2\sigma \cos \varphi)^{-1/2} = \frac{a'}{r'} (A + P)^{-1/2},$$

где

$$A = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\lambda - \lambda'),$$

$$P_1 = \cos(\lambda - \lambda') - \frac{\sigma}{\alpha} \cos \varphi,$$

$$P_2 = \left( \frac{\sigma}{\alpha} \right)^2 - 1,$$

$$P = 2\alpha P_1 + \alpha^2 P_2.$$

(22)

Величина  $A$  зависит только от двух аргументов:  $\alpha$  и  $\lambda - \lambda'$ . Из первого равенства (22) следует, что  $A \geq (1 - \alpha)^2$  при любых вещественных значениях  $\lambda - \lambda'$ . Для всякой рассматриваемой нами планетной пары  $\alpha < 1$ , так что  $A$  отделена от нуля и можно записать

$$\frac{a'}{\Delta} = \frac{a'}{r'} A^{-1/2} \left( 1 + \frac{P}{A} \right)^{-1/2}.$$

Если эксцентриситеты и наклоны орбит достаточно малы и если  $\alpha$  не слишком близко к единице, справедливо  $P < A$ . В самом деле, согласно (22), величина  $P$  разлагается в ряд по степеням эксцентрических и облических (позиционных) элементов<sup>4</sup>. Непосредственным получением первых членов можно убедиться, что  $P$  имеет первый порядок малости по эксцентрическим элементам (см. также формулы (47, 48) в работе [8]). В то же время при не слишком близком к единице значении  $\alpha$  величина  $A$  имеет порядок единицы.

---

<sup>4</sup>Далее для краткости под позиционными будем везде подразумевать совокупность эксцентрических и облических переменных.

Итак,  $P/A < 1$ . Поэтому величина  $(1 + P/A)^{-1/2}$  разлагается в ряд по степеням отношения  $P/A$ , что приводит к представлению

$$\frac{a'}{\Delta} = \frac{a'}{r'} A^{-1/2} - \frac{1}{2} \frac{a'}{r'} P A^{-3/2} + \frac{3}{8} \frac{a'}{r'} P^2 A^{-5/2} - \frac{5}{16} \frac{a'}{r'} P^3 A^{-7/2} + \frac{35}{128} \frac{a'}{r'} P^4 A^{-9/2} - \dots$$

Положим

$$U_k = \frac{a'}{r'} P^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Тогда

$$\frac{a'}{\Delta} = U_0 A^{-1/2} - \frac{1}{2} U_1 A^{-3/2} + \frac{3}{8} U_2 A^{-5/2} - \frac{5}{16} U_3 A^{-7/2} + \frac{35}{128} U_4 A^{-9/2} - \dots \quad (24)$$

Для всякого полуцелого положительного  $\mathfrak{s}$  функция  $A^{-\mathfrak{s}}$  разлагается в ряд Фурье по косинусам углов, кратных  $\lambda - \lambda'$ , который сходится для всех вещественных значений  $\lambda - \lambda'$ . Коэффициенты  $U_k$  являются степенными рядами относительно эксцентрических и облических элементов. В результате получаем ряд Пуассона.

Покажем, каким образом строится разложение в ряд функций  $A^{-\mathfrak{s}}$  и  $U_k$ .

Величина  $A^{-\mathfrak{s}}$  является производящей функцией коэффициентов Лапласа. Ее представление в виде ряда Лорана выглядит следующим образом:

$$A^{-\mathfrak{s}} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{\mathfrak{s}}^{(k)} \mathfrak{e}^{ik(\lambda - \lambda')}. \quad (25)$$

Коэффициенты Лапласа  $b_{\mathfrak{s}}^{(k)}(\alpha)$  являются функциями одного непрерывного аргумента  $\alpha$ .

Разложение величин  $U_k$ , согласно (22, 23), сводится к разложению основных функций кеплеровского движения, поскольку

$$\frac{\sigma}{\alpha} = \frac{r}{a} \frac{a'}{r'}, \quad \cos \varphi = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}.$$

Каждая из безразмерных функций  $r/a, a/r, x/r, y/r, z/r$  разлагается в степенной ряд относительно соответствующих планете позиционных элементов. Метод разложения этих функций по безразмерным комплексным параметрам (18) приведен в работе [10].

### 2.5.3 Вычислительный алгоритм разложения функции $a'/\Delta$

На практике работа с  $a'/\Delta$  означает использование отрезка ряда (24). Количество удерживаемых слагаемых определяется точностью, с которой решается задача. Ряд (24) является рядом Пуассона, поэтому разложение строится до определенной степени  $d$  позиционных и до определенной кратности  $w$  угловых элементов.



Функции  $A^{-5}$  не зависят от позиционных элементов, поэтому в (24) до степени  $d$  разлагаются величины  $U$  (то есть  $U_0, U_1, U_2, \dots$ ). Разложение всех  $U$  в степенной ряд строится с помощью (23). Функция  $P$  имеет первый порядок малости по эксцентрическим элементам, а  $a'/r'$  — нулевой, поэтому  $U_k$  является величиной  $k$ -го порядка малости относительно позиционных элементов. Отсюда следует, что величины  $U_k$  разлагаются лишь для  $k \leq d$ . Для вычисления  $U_d$  достаточно взять разложение  $P$  до первой степени.

Количество элементов в ряде  $P$  больше по сравнению с числом элементов в обычных кеплеровских разложениях ( $P$  зависит от положения двух планет). При заданной точности разложения это приводит к увеличению длины используемого отрезка ряда. Численные эксперименты показывают, что число членов в отрезках рядов  $U$  возрастает при этом на 2-3 порядка. Например, разложения функций  $x/r$  и  $y/r$  до 12-го порядка малости по степеням параметров (18) содержат по 446 слагаемых [10]. В разложении функции  $U_3$  до 12-го порядка малости по тем же элементам содержится 256 401 слагаемое.

Эти оценки размеров используемых частных сумм  $U$  означают, что замечание о порядках малости величин  $U$  может быть эффективно использовано на практике. Именно, для разложения рядов  $U_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, d$ ) до заданной степени  $d$  не обязательно каждый раз брать ряд  $P$  (в соответствии с (23)), разложенный до степени  $d$  (разложение  $P$  до степени  $d$  потребуется лишь при вычислении  $U_1$ ). Будем использовать метод, основанный на следующем свойстве однородных многочленов (форм): их произведение есть также форма [7]. Этот метод использует лишь операции сложения и умножения рядов.

Прежде всего, из (23) вытекает рекуррентное соотношение для коэффициентов  $U$ :

$$U_k = U_{k-1}P, \quad k = 1, 2, \dots, d.$$

Отсюда следует, что разложение рядов  $U$  можно строить по очереди: сначала  $U_0 = a'/r'$ , затем  $U_1, U_2, \dots, U_d$  путем домножения каждый раз на  $P$ .

Сначала ряд  $P$  разлагаем до степени  $d$  (по позиционным элементам). Полученный многочлен  $P_d$  представляем суммой однородных многочленов  $p_j$  степени  $j$  относительно позиционных элементов:  $P_d = p_1 + p_2 + \dots + p_d$ .

Построение рядов  $U$  производится также путем получения и сложения однородных многочленов относительно эксцентрических и облических переменных:

$$U_k = \sum_{j=k}^d u_{kj}.$$

Каждая форма  $u_{kj}$  имеет двойной индекс. Первый означает индекс величины  $U_k$ , а второй  $j = k, k+1, \dots, d$  равен степени формы  $u_{kj}$ .

После получения  $P_d$  разложение  $U_0 = a'/r'$  до степени  $d$  представляем суммой

$$U_0 = u_{00} + u_{01} + \dots + u_{0d}.$$

Свободный член в разложении  $a'/r'$  равен 1, так что  $u_{00} = 1$ . После этого шага получаем последовательно остальные величины  $U_1, U_2, \dots, U_d$ .

Ряд  $U_1$  складывается из форм  $u_{1j}$ , где  $1 \leq j \leq d$ . Каждая форма  $u_{1j}$  складывается из произведений некоторых форм, входящих в состав  $U_0$ , на соответствующую форму из многочлена  $P_d$ . Из  $U_0$  и  $P_d$  берутся все такие формы, степени которых в сумме дают  $j$ :

$$u_{1j} = u_{00}p_j + u_{01}p_{j-1} + u_{02}p_{j-2} + \dots + u_{0,j-1}p_1 = \sum_{s=0}^{j-1} u_{0s}p_{j-s}.$$

Поясним сказанное примерами:

$$u_{11} = u_{00}p_1,$$

$$u_{12} = u_{00}p_2 + u_{01}p_1,$$

$$u_{14} = u_{00}p_4 + u_{01}p_3 + u_{02}p_2 + u_{03}p_1,$$

$$u_{1d} = u_{00}p_d + u_{01}p_{d-1} + u_{02}p_{d-2} + \dots + u_{0,d-1}p_1.$$

Получение остальных  $U_k$  ( $k = 2, 3, \dots, d$ ) совершается с помощью форм, входящих в состав предыдущего  $U_{k-1}$ , и форм из состава  $P_d$ . Дадим несколько примеров:

$$u_{22} = u_{11}p_1,$$

$$u_{48} = u_{33}p_5 + u_{34}p_4 + u_{35}p_3 + u_{36}p_2 + u_{37}p_1,$$

$$u_{9,11} = u_{88}p_3 + u_{89}p_2 + u_{8,10}p_1,$$

$$u_{12,12} = u_{11,11}p_1 = u_{10,10}p_1p_1 = u_{99}p_1^3 = \dots = u_{00}p_1^{12} = p_1^{12}.$$

Общие формулы получения  $u_{kj}$  и  $U_k$  для  $k = 1, 2, \dots, d$  имеют вид

$$u_{kj} = \sum_{s=k-1}^{j-1} u_{k-1,s}p_{j-s}, \quad U_k = \sum_{j=k}^d \sum_{s=k-1}^{j-1} u_{k-1,s}p_{j-s}. \quad (26)$$

На практике — при работе с системами компьютерной алгебры — такой метод построения рядов  $U$  оказывается эффективным, так как размеры используемых отрезков рядов  $U$

являются относительно большими и удобнее работать с их более мелкими частями, которыми являются рассмотренные формы  $u_{kj}$ .

Рассмотрим теперь, каким образом останавливается разложение  $a'/\Delta$  на заданной кратности  $w$  по  $\lambda$  и  $\lambda'$ . Средние долготы  $\lambda$  и  $\lambda'$  входят в слагаемые полученных отрезков рядов  $U$  тригонометрическими многочленами  $\Lambda^v \Lambda'^{v'}$ , где  $\Lambda = e^{i\lambda}$ ,  $\Lambda' = e^{i\lambda'}$ , а  $v$  и  $v'$  — целые числа. Поэтому максимальная кратность  $w$  разложения  $a'/\Delta$  относительно  $\lambda$  и  $\lambda'$  определяется кратностью разложения функций  $A^{-s}$ . Необходимо узнать, какие пределы следует выбрать для  $k$  в (25), чтобы после перемножения рядов  $U$  и  $A^{-s}$  у всех полученных членов разложения  $a'/\Delta$  степени элементов  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  не превышали по модулю  $w$ . Поскольку

$$\Lambda^v \Lambda'^{v'} \Lambda^k \Lambda'^{-k} = \Lambda^{v+k} \Lambda'^{v'-k},$$

задача сводится к нахождению всех целых  $k$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} -w \leq v + k \leq w, \\ -w \leq v' - k \leq w. \end{cases} \quad (27)$$

Из (27) заключаем, что при заданном  $w$  член из рядов  $U$ , имеющий множителем  $\Lambda^v \Lambda'^{v'}$ , домножается лишь на те члены ряда

$$A^{-s} = \frac{1}{2} (\dots + b_s^{(-1)} \Lambda^{-1} \Lambda' + b_s^{(0)} + b_s^{(1)} \Lambda \Lambda'^{-1} + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_s^{(k)} \Lambda^k \Lambda'^{-k}, \quad (28)$$

у которых  $\max\{-v - w, v' - w\} \leq k \leq \min\{w - v, w + v'\}$ .

При изучении долговременных изменений планетных орбит может возникнуть необходимость извлечения из  $a'/\Delta$  лишь тех слагаемых, угловые аргументы которых являются заданными линейными комбинациями средних долгот  $n\lambda + n'\lambda'$ , где  $n$  и  $n'$  — целые числа (например,  $2\lambda - 5\lambda'$ ). Согласно работе [8], для получения слагаемых из  $a'/\Delta$ , ассоциированных с угловым аргументом  $n\lambda + n'\lambda'$ , удобно использовать определение долготной характеристики  $n + n'$  члена разложения. Долготная характеристика каждого слагаемого ряда (28) равна нулю, поэтому для получения членов ряда  $a'/\Delta$  с аргументом  $n\lambda + n'\lambda'$  достаточно из разложения величин  $U$  взять только те слагаемые, у которых степени элементов  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  в сумме дают  $n + n'$  (с последующим домножением этих слагаемых на соответствующий член из ряда (28)).

## 2.6 Программное обеспечение для построения разложений

Практическое разложение главной  $h_3$  и дополнительной  $h_4$  части возмущающей функции выполняется с помощью специальных алгебраических пакетов. Нами были написаны вычислительные программы, позволяющие получать необходимые разложения до заданной степени точности. Все разложения строились в системе компьютерной алгебры Piranha [3]. На некоторых этапах работы для контроля правильности получаемых результатов мы применяли систему общего назначения Maple.

В системе Piranha поддерживаются различные форматы представления чисел. С целью избежать накопления ошибок, коэффициенты всех получаемых разложений представлялись в виде рациональных чисел.

Пользовательский интерфейс Piranha реализован на языке Python, поэтому библиотеку всех написанных программ мы составили в виде нескольких модулей (файлов с расширением `.py`), расположенных в корневой директории системы.

### 2.6.1 Модуль `M_KEPLER.py`

Этот модуль содержит процедуры<sup>5</sup>, реализующие разложения основных формул кеплеровского движения. Алгоритм получения необходимых разложений  $r/a, a/r, x/r, y/r, z/r$ , а также  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  по параметрам (18) подробно описан в работе [10].

Следуя [10], в основу кеплеровского процессора мы положили функции  $z_1 = e \sin M$  и  $z_2 = e \cos M$ . Аналитическое представление  $z_1$  и  $z_2$  через параметры (18) имеет следующий вид (см. формулы (13) в работе [10]):

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{i}{2} \left[ X\Lambda^{-1} - \bar{X}\Lambda \right] \sqrt{1 - \frac{X\bar{X}}{4}}, \\ z_2 &= \frac{1}{2} \left[ X\Lambda^{-1} + \bar{X}\Lambda \right] \sqrt{1 - \frac{X\bar{X}}{4}}. \end{aligned} \tag{29}$$

Разложение правых частей (29) в степенной ряд выполняется системой Piranha автоматически. Единственным аргументом `dg` строящей эти разложения процедуры `z1z2(dg)` является степень, до которой требуется получить разложение. Полученный отрезок ряда записывается системой в отдельный файл и сохраняется. В приложении Б приведена

---

<sup>5</sup>Напомним, что *процедурой* в языке Python называют заданную последовательность команд, которая в точку вызова не возвращает никакого значения. Последовательность команд, возвращающая в точку вызова какое-либо значение, называется *функцией*.

машинная запись разложения  $z_1$  до 12 степени включительно в файл `z1_12.qrc`. Приведем первые члены разложения функции  $z_1$ :

$$z_1 = \frac{i}{2} X \Lambda^{-1} - \frac{i}{2} \bar{X} \Lambda - \frac{i}{16} X^2 \bar{X} \Lambda^{-1} + \frac{i}{16} X \bar{X}^2 \Lambda - \\ - \frac{i}{256} X^3 \bar{X}^2 \Lambda^{-1} + \frac{i}{256} X^2 \bar{X}^3 \Lambda - \frac{i}{2048} X^4 \bar{X}^3 \Lambda^{-1} + \frac{i}{2048} X^3 \bar{X}^4 \Lambda + \dots$$

После получения отрезков рядов  $z_1$  и  $z_2$  строятся последовательно все остальные необходимые разложения. Программная реализация разложения каждой функции в данном модуле по существу одна и та же: дается аналитическое выражение функции, указывается степень разложения, указываются переменные, по которым выполняется разложение, полученный многочлен записывается в файл с определенным именем в указанную директорию.

В качестве примера в Приложении В приводится программа (процедура), реализующая разложение функции  $z_3 = E - M$  по степеням  $z_1$  и  $z_2$  (через  $E$  обозначена эксцентрическая аномалия). Разложение можно выполнять с помощью формулы Бурмана–Лагранжа [21], однако мы предпочли использовать для этой цели не требующий операций дифференцирования метод итераций [21].

### 2.6.2 Модуль `M_POISSON.py`

В этом модуле находятся процедуры, выполняющие разложения пуассоновского процессора  $\sigma/\alpha$ ,  $\cos \varphi$ ,  $P$ , а также процедуры, строящие в соответствии с (23, 24) разложения рядов  $U$  и  $a'/\Delta$ .

Предложенный способ разложения коэффициентов  $U$  кажется громоздким, однако алгоритм работы с формулами (26) программируется без затруднений. Кроме того, разложение величин  $U$  происходит лишь один раз, поскольку полученные ряды записываются и сохраняются в соответствующих файлах.

Метод получения отрезка ряда  $a'/\Delta$  при заданных  $d$  и  $w$  и метод получения членов  $a'/\Delta$ , ассоциированных с заданным угловым аргументом  $n\lambda + n'\lambda'$ , программируются с помощью встроенных функций системы `Piranha` и стандартных средств языка `Python`.

### 2.6.3 Модуль `M_LAPLACE.py`

Для сравнения полученного нами разложения  $a'/\Delta$  с приведенным в работе Ласкара и Робютеля [8] разложением  $a'/\Delta$  (см. следующие два параграфа) был написан мо-

дуть `M_LAPLACE.py`. В этом модуле находятся функции, позволяющие с помощью рекуррентных соотношений [1, 4] выполнять преобразования коэффициентов Лапласа между собой (возвращаемыми значениями этих функций являются коэффициенты Лапласа).

В Приложении Г для примера мы приводим содержимое функции `UP_IND(n, k)` (смысл аргументов `n` и `k` приведен там же), получающей при помощи рекуррентного соотношения

$$b_s^{(k+1)} = \frac{k}{k - s + 1}(\alpha + \alpha^{-1})b_s^{(k)} - \frac{k + s - 1}{k - s + 1}b_s^{(k-1)}$$

выражение произвольного коэффициента Лапласа  $b_s^{(k)}$  через  $b_s^{(0)}$  и  $b_s^{(1)}$  (с коэффициентами, зависящими от целых степеней  $\alpha$ ). Из этого соотношения мы выводим следующие нужные нам представления (см. формулы (30, 31) и пояснения к ним):

$$\begin{aligned} b_{3/2}^{(2)} &= 2(\alpha + \alpha^{-1})b_{3/2}^{(1)} - 3b_{3/2}^{(0)}, \\ b_{5/2}^{(2)} &= -2(\alpha + \alpha^{-1})b_{5/2}^{(1)} + 5b_{5/2}^{(0)}, \\ b_{5/2}^{(3)} &= -(8\alpha^{-2} + 23 + 8\alpha^2)b_{5/2}^{(1)} + 20(\alpha + \alpha^{-1})b_{5/2}^{(0)}. \end{aligned}$$

Функция `DOWN_IND(n, k, d)` при помощи рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} b_s^{(k)} &= \frac{s}{k + s}(1 + \alpha^2)b_{s+1}^{(k)} - \frac{s}{k + s}2\alpha b_{s+1}^{(k+1)}, \\ b_s^{(k+1)} &= \frac{s}{k - s + 1}2\alpha b_{s+1}^{(k)} - \frac{s}{k - s + 1}(1 + \alpha^2)b_{s+1}^{(k+1)}, \\ b_{s+1}^{(k)} &= \frac{s + k}{s} \frac{1 + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} b_s^{(k)} - \frac{k - s + 1}{s} \frac{2\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} b_s^{(k+1)}, \\ b_{s+1}^{(k+1)} &= \frac{s + k}{s} \frac{2\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} b_s^{(k)} - \frac{k - s + 1}{s} \frac{1 + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} b_s^{(k+1)}, \end{aligned}$$

а также при помощи вызова функции `UP_IND(n, k)` выражает коэффициент Лапласа  $b_s^{(k)}$  для четного  $d$  (нуль тоже считаем четным) через  $b_{d/2+1/2}^{(0)}$  и  $b_{d/2+1/2}^{(1)}$ , а для нечетного — через<sup>6</sup>  $b_{[d/2]+3/2}^{(0)}$  и  $b_{[d/2]+3/2}^{(1)}$ . Неотрицательное целое  $d$  (аргумент `d`) обозначает степень одночлена по позиционным элементам, имеющего множителем  $b_s^{(k)}$  в разложении  $a'/\Delta$ . Приведем для примера два результата применения этой функции:

$$\begin{aligned} b_{5/2}^{(0)} &= \frac{1 + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} b_{3/2}^{(0)} + \frac{2\alpha}{3(1 - \alpha^2)^2} b_{3/2}^{(1)}, \\ b_{5/2}^{(3)} &= \frac{4\alpha^{-1} - 6\alpha + 4\alpha^3}{(1 - \alpha^2)^2} b_{3/2}^{(0)} + \frac{-8\alpha^{-2} + 9 + 9\alpha^2 - 8\alpha^4}{3(1 - \alpha^2)^2} b_{3/2}^{(1)}. \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Скобками  $\lfloor \cdot \rfloor$  мы обозначаем целую часть числа.

## 2.7 Результаты

Использование коэффициентов Лапласа означает представление  $a'/\Delta$  в виде одиннадцатиаргументного разложения. Участвуют 8 позиционных элементов

$$X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, X', \bar{X}', Y', \bar{Y}',$$

два угловых элемента  $\Lambda, \Lambda'$  (при работе с вычислительными системами средние долготы  $\lambda, \lambda'$  удобнее представлять элементами  $\Lambda, \Lambda'$ ) и единственный аргумент коэффициентов Лапласа  $\alpha$ . Разложение безразмерного  $a'/\Delta$  происходит по степеням одиннадцати указанных безразмерных элементов.

Приведем первые члены полученного разложения  $a'/\Delta$ . При построении всех разложений коэффициенты Лапласа сохранялись в символьном виде.

**Таблица 1.** Разложение вековой части  $a'/\Delta$  по позиционным элементам до второй степени включительно

Функция от $\alpha$	$X$	$\bar{X}$	$X'$	$\bar{X}'$	$Y$	$\bar{Y}$	$Y'$	$\bar{Y}'$
$c_0(\alpha)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$c_1(\alpha)$	1	1	0	0	0	0	0	0
$c_1(\alpha)$	0	0	1	1	0	0	0	0
$c_2(\alpha)$	1	0	0	1	0	0	0	0
$c_2(\alpha)$	0	1	1	0	0	0	0	0
$c_3(\alpha)$	0	0	0	0	1	1	0	0
$c_3(\alpha)$	0	0	0	0	0	0	1	1
$c_4(\alpha)$	0	0	0	0	1	0	0	1
$c_4(\alpha)$	0	0	0	0	0	1	1	0

В табл. 1 представлено разложение вековой части  $a'/\Delta$  до второй степени включительно по эксцентрическим и облическим элементам. В этом отрезке ряда содержится 31 слагаемое. Для большей наглядности и сокращения длины таблицы в первую колонку мы поместили функции от одного аргумента  $\alpha$ , которые домножаются на соответствующий одно-

член по позиционным элементам. Степени позиционных элементов в этом одночлене приводятся в остальных колонках. Указанные функции от  $\alpha$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
c_0(\alpha) &= \frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)}, \\
c_1(\alpha) &= -\frac{3}{8}\alpha^2 b_{3/2}^{(0)} - \frac{1}{4}\alpha b_{3/2}^{(1)} + \left[ \frac{15}{16}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha^4 \right] b_{5/2}^{(0)} - \frac{3}{4}\alpha^3 b_{5/2}^{(1)} - \frac{9}{16}\alpha^2 b_{5/2}^{(2)}, \\
c_2(\alpha) &= \frac{3}{8}\alpha^2 b_{3/2}^{(1)} + \frac{1}{4}\alpha b_{3/2}^{(2)} + \frac{3}{8}\alpha^3 b_{5/2}^{(0)} - \left[ \frac{21}{32}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha^4 \right] b_{5/2}^{(1)} + \frac{3}{8}\alpha^3 b_{5/2}^{(2)} + \frac{9}{32}\alpha^2 b_{5/2}^{(3)}, \\
-c_3(\alpha) &= c_4(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha b_{3/2}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Как видим из табл. 1, функция  $c_0(\alpha)$  является свободным членом разложения  $a'/\Delta$  как ряда Пуассона (24). Можно показать, что разложение  $a'/\Delta$  в виде ряда (24) обладает даламберовской характеристикой [18], поэтому в разложении вековой части  $a'/\Delta$  содержатся одночлены только четной степени (по эксцентрическим и облическим элементам).

**Таблица 2.** Члены разложения  $a'/\Delta$  до второй степени включительно по позиционным элементам, ассоциированные с угловыми аргументами  $\lambda - 2\lambda'$  и  $-\lambda + 2\lambda'$

	$X$	$X'$	$\bar{X}$	$\bar{X}'$	$\alpha$	$b_{1/2}^{(1)}$	$b_{3/2}^{(0)}$	$b_{3/2}^{(1)}$	$b_{3/2}^{(2)}$	$b_{3/2}^{(3)}$	$\Lambda$	$\Lambda'$
1/4	1	0	0	0	2	0	0	0	1	0	1	-2
-3/8	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	-2
1/8	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	-2
-1/4	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	-2
3/8	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	-2
-1/8	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	-2
1/4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-2
1/4	0	0	1	0	2	0	0	0	1	0	-1	2
-3/8	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	-1	2
1/8	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1	2
-1/4	0	0	0	1	2	0	0	1	0	0	-1	2
3/8	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	-1	2
-1/8	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	-1	2
1/4	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	-1	2



В табл. 2 приведено разложение по эксцентрическим и облическим переменным долгой (периодической) части  $a'/\Delta$  до второй степени включительно. В этой таблице мы приводим члены, ассоциированные с аргументами  $\lambda - 2\lambda'$  и  $-\lambda + 2\lambda'$ .

Итак, в таблицах 1 и 2 представлены некоторые первые члены разложения функции  $a'/\Delta$ , входящей множителем в каждое слагаемое  $R$  главной части  $h_3$  возмущающей функции  $h_2$  (см. формулы (20, 21)).

В Приложении Д приводятся (аналогично в виде таблицы) первые члены разложения дополнительной части  $h_4$  возмущающей функции  $h_2$ . В таблице дается разложение безразмерного множителя  $W'$ , входящего в скалярное произведение гелиоцентрических скоростей  $\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}' = \omega\omega'aa'W'$  (через  $\omega$  обозначено среднее движение планеты). Согласно (19), величина  $\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}'$  входит в каждое слагаемое дополнительной части  $h_4$ .

Согласно [10], для имеющего размерность квадрата скорости множителя  $\omega\omega'aa'$  справедливо равенство

$$\omega\omega'aa' = \frac{\varkappa^2 \varkappa'^2 \beta \beta'}{LL'},$$

с помощью которого мы получаем окончательное разложение дополнительной части  $h_4$  по комплексным элементам (17).

## 2.8 Обсуждение результатов

В основу всех разложений мы положили метод, разработанный в [10]. Этот метод опирается на изложенные в монографии Субботина [14] идеи. Представляется целесообразным сравнение с полученным в работе [8] разложением  $a'/\Delta$ , поскольку мы используем одинаковые элементы: параметры (18) и коэффициенты Лапласа.

Ласкар и Робютель [8] в разложении  $a'/\Delta$  используют преобразование коэффициентов Лапласа, указанное в пункте 2.6.3. Его применение существенно сокращает количество членов (см. подробности в работе [8]).

Проиллюстрируем выигрыш в числе слагаемых на примере представленного таблицей 1 разложения вековой части  $a'/\Delta$ . После необходимых преобразований в (30) функции  $c_1(\alpha)$ ,  $c_2(\alpha)$  приобретают вид

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) &= \frac{1}{8}\alpha b_{3/2}^{(1)}, \\ c_2(\alpha) &= \frac{3}{8}\alpha b_{3/2}^{(0)} - \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha^2 \right] b_{3/2}^{(1)}, \end{aligned} \tag{31}$$

а функции  $c_0(\alpha)$ ,  $c_3(\alpha)$ ,  $c_4(\alpha)$  не изменяются. Формулы (31) показывают, что наше разложение по позиционным элементам вековой части  $a'/\Delta$  до второй степени включительно совпадает с разложением  $a'/\Delta$ , представленным в работе [8]. Представление (31) уменьшает число слагаемых в этом отрезке ряда с 31 (таблица 1) до 13 [8, стр. 215].

Согласно [8], при увеличении степени разложения  $a'/\Delta$  экономия слагаемых должна быть все более значительной. Например, в построенном нами разложении по позиционным элементам вековой части  $a'/\Delta$  до четвертой степени включительно содержится 577 слагаемых. Согласно [8], этот отрезок ряда сокращается до 165 слагаемых [8, стр. 215].

### 3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основанное на подходящей замене коэффициентов Лапласа сокращение числа слагаемых в разложении  $a'/\Delta$  вида (24) проиллюстрировано Ласкаром и Робютелем [8] лишь на примере разложения вековой части. Представляется целесообразным применить указанный метод также для периодической части разложения. Достоинством указанного метода является возможность избежать использования производных от коэффициентов Лапласа, а также то, что после его применения количество коэффициентов Лапласа с различными нижними и верхними индексами в разложении (24) значительно снижается.

Результаты настоящей работы предполагается использовать для построения осредненных уравнений движения планетной системы. Автор выражает благодарность научному руководителю К. В. Холшевникову за руководство работой и помощь в подготовке рукописи, а также ресурсному центру «Вычислительного центра Санкт-Петербургского государственного университета» за предоставленную возможность использования вычислительного кластера при построении всех разложений. Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (грант 6.37.341.2015).

### 4 ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

На защиту выносятся следующие положения:

1. Исследована гелиоцентрическая система координат. В отличие от многих современных работ, для вывода всех уравнений использован лагранжев формализм. Проведено элементарное сравнение гелиоцентрических координат с системой координат Якоби [19]. Выявлены сравнительные преимущества и недостатки указанных систем.

2. Предложена специальная система оскулирующих элементов. По сравнению с классическими системами, используемая в работе система комплексных канонических элементов Пуанкаре (17) позволяет получать более компактные разложения кеплерова движения, что оказывается выгодным при построении разложения возмущающей функции.

3. Построено разложение гамильтониана  $N$ -планетной задачи в ряд Пуассона. Предложен алгоритм разложения главной и дополнительной части возмущающей функции. Представлены первые члены разложения обеих частей. Проведено сравнение с результатами работы [8].

4. Протестирована и изучена специальная система компьютерной алгебры [3]. Написан комплекс программ, реализующих все рассмотренные в работе разложения.

## Список литературы

- [1] Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике (М.: Наука, 1986).
- [2] Арнольд В.И. Математические методы классической механики (М.: Наука, 1989).
- [3] Бискани (F. Biscani). The Piranha algebraic manipulator // arXiv:0907.2076v1.
- [4] Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики (М.: Мир, 1964).
- [5] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы (М.: Наука, 1975).
- [6] Красинский Г.А. Основные уравнения планетной теории (М.: Наука, сб. Малые Планеты, под ред. Н.С. Самойловой-Яхонтовой, 1973), с. 81.
- [7] Курош А.Г. Курс высшей алгебры (М.: Наука, 1975).
- [8] Ласкар, Робютель (J. Laskar and P. Robutel). Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian // Celest. Mech. Dynam. Astron. **62**, 193 (1995).
- [9] Либер, Сансотера (A.-S. Libert and M. Sansottera). On the extension of the Laplace-Lagrange secular theory to order two in the masses for extrasolar systems // Celest. Mech. Dynam. Astron. **117**, 149 (2013).

- [10] Микрюков Д.В., Холшевников К.В. Разложение основных функций кеплеровского движения с использованием комплексных переменных // Письма в Астрон. журн. **42**, 302 (2016).
- [11] Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы (М.: Физматлит, 2009).
- [12] Петровская М.С., Иванова Т.В. О построении разложений планетной возмущающей функции // Бюлл. ИТА АН СССР **XIV**, 288 (1978).
- [13] Родригес, Галлардо (A. Rodríguez and T. Gallardo). The dynamics of the HD12661 extrasolar planetary system // Astrophys. J. **628**, 1006 (2005).
- [14] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию (М.: Наука, 1968).
- [15] Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики (М.: Наука, 1967).
- [16] Ферраз-Меллу (S. Ferraz-Mello). The convergence domain of the Laplacian expansion of the Disturbing Function // Celest. Mech. Dynam. Astron. **58**, 37 (1994).
- [17] Ферраз-Меллу и др. (S. Ferraz-Mello, T.A. Michtchenko and C.Beaugé). Regular Motions in Extra-Solar Planetary Systems // arXiv:astro-ph/0402335v2.
- [18] Холшевников К.В. Даламберовские функции в небесной механике // Астрон. журн. **74**, 146 (1997).
- [19] Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д. Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам (теория) // Астрон. вестник **35**, 267 (2001).
- [20] Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д. Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: оценка и прямое вычисление коэффициентов // Астрон. вестник **36**, 75 (2002).
- [21] Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел: Учебное пособие (СПб.: СПбГУ, 2007).

# Приложение А

## Определитель преобразования абсолютных координат к якобиевым

Пусть планетная система состоит из центральной звезды и  $N$  планет. Следуя работе [19], систему координат Якоби определим соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \frac{1}{\tilde{m}} \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{\mu}{\tilde{m}} \sum_{j=1}^N m_j \boldsymbol{\rho}_j, \\ \mathbf{r}_k &= \boldsymbol{\rho}_k - \frac{1}{\tilde{m}_{k-1}} \boldsymbol{\rho}_0 - \frac{\mu}{\tilde{m}_{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} m_j \boldsymbol{\rho}_j, \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

где  $\tilde{m}_0 = 1$ ,  $\tilde{m}_k = 1 + \mu m_1 + \dots + \mu m_k$ , а остальные обозначения в правых частях имеют с (1) одинаковый смысл. Пустая сумма (для  $k = 1$ ) считается равной нулю.

Чтобы показать, что определитель  $D_J$  преобразования (П1) равен единице, прибавим к первому столбцу  $D_J$  все остальные столбцы:

$$D_J = \left| \begin{array}{cccccc} \frac{1}{\tilde{m}} & \frac{\mu m_1}{\tilde{m}} & \frac{\mu m_2}{\tilde{m}} & \dots & \frac{\mu m_{N-1}}{\tilde{m}} & \frac{\mu m_N}{\tilde{m}} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\tilde{m}_1} & \frac{-\mu m_1}{\tilde{m}_1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-1}{\tilde{m}_{N-2}} & \frac{-\mu m_1}{\tilde{m}_{N-2}} & \frac{-\mu m_2}{\tilde{m}_{N-2}} & \dots & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\tilde{m}_{N-1}} & \frac{-\mu m_1}{\tilde{m}_{N-1}} & \frac{-\mu m_2}{\tilde{m}_{N-1}} & \dots & \frac{-\mu m_{N-1}}{\tilde{m}_{N-1}} & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccccc} 1 & \frac{\mu m_1}{\tilde{m}} & \frac{\mu m_2}{\tilde{m}} & \dots & \frac{\mu m_{N-1}}{\tilde{m}} & \frac{\mu m_N}{\tilde{m}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\mu m_1}{\tilde{m}_1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{-\mu m_1}{\tilde{m}_{N-2}} & \frac{-\mu m_2}{\tilde{m}_{N-2}} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-\mu m_1}{\tilde{m}_{N-1}} & \frac{-\mu m_2}{\tilde{m}_{N-1}} & \dots & \frac{-\mu m_{N-1}}{\tilde{m}_{N-1}} & 1 \end{array} \right|.$$

Дополнительный минор стоящей в левом верхнем углу единицы равен единице, поэтому разложение преобразованного определителя по первому столбцу дает  $D_J = 1$ .

## Приложение Б

Разложение функции  $z_1 = e \sin M$  до 12 степени включительно по параметрам  $X, \bar{X}, \Lambda = \epsilon^{i\lambda}$  в системе Piranha

```
[poly_arg]
name=Xc
time_eval=
[poly_arg]
name=X
time_eval=
[poly_arg]
name=LMB
time_eval=
[terms]
(0,1/16)|2;1;1
(0,-1/16)|1;2;-1
(0,-1/2)|1;0;1
(0,-7/524288)|5;6;-1
(0,-1/2048)|3;4;-1
(0,-5/65536)|4;5;-1
(0,1/256)|3;2;1
(0,1/2048)|4;3;1
(0,1/2)|0;1;-1
(0,-1/256)|2;3;-1
(0,5/65536)|5;4;1
(0,7/524288)|6;5;1
```

## Приложение В

Процедура, выполняющая разложение функции  $z_3 = E - M$  по степеням  $z_1 = e \sin M$  и  $z_2 = e \cos M$  методом итераций

```
def z3_z1z2(dg): #аргумент dg - степень разложения z3 по z1 и z2
    import pyranha
    Z1=pyranha.Qpoly.qpolyc(pyranha.Core.psym('z1'))
    Z2=pyranha.Qpoly.qpolyc(pyranha.Core.psym('z2'))
    W=pyranha.Qpoly.qpolyc(pyranha.Core.psym('w'))
    wz=Z1
    SIN=0
    COS=W**0
    term=1
    n=1
    while n<dg:
        n=n+1
        print "-"*80
        print "n=",n
        term=term*W/(n-1)
        print "term = ",term
        if 1j**n==-1:      # n=2,6,10,14,...
            SIN=SIN+term
        elif 1j**n==-1j:   # n=3,7,11,15,...
            COS=COS-term
        elif 1j**n==1:     # n=4,8,12,16,...
            SIN=SIN-term
        elif 1j**n==1j:    # n=5,9,13,17,...
            COS=COS+term
        SINz=SIN.sub('w',wz)
        COSz=COS.sub('w',wz)
        pyranha.Truncators.truncators.degree.set(n+1)
        wz=Z1*COSz+Z2*SINz
        print "wz = ",wz

    pyranha.Truncators.truncators.degree.unset()
    wz.save_to('z3_z1z2_'+str(dg)+'.qpc')
```

## Приложение Г

Функция, получающая выражение коэффициента Лапласа  $b_s^{(k)}$  через  $b_s^{(0)}$  и  $b_s^{(1)}$

```
#Lp cf = Laplace coefficient
#this function expresses b_n^k in terms of b_n^0 and b_n^1
#the lower index n is not transformed
#this function is applied to all Lp cfs in the series
#n=2*s, where s - half integer
#k - the upper index
def UP_IND(n,k): # аргумент n=2s - нижний индекс; аргумент k - верхний индекс
    import pyranha
    alp=pyranha.Qpoly.qpoly(pyranha.Core.psym('ALP'))

    #initial values of Lp cfs
    b_f=pyranha.Qpoly.qpoly(pyranha.Core.psym('b'+str(n)+'^0'))
    b_s=pyranha.Qpoly.qpoly(pyranha.Core.psym('b'+str(n)+'^1'))

    if k == 0:
        return b_f
    if k == 1:
        return b_s
    if k > 1:
        i=0
        #i runs from 1 to k-1
        #the number of the loops is k-1
        while i < k-1:
            i=i+1
            b_nxt=2*i*(alp+alp**-1)*b_s/(2*i-n+2)-(2*i+n-2)*b_f/(2*i-n+2)
            b_f=b_s
            b_s=b_nxt

        return b_nxt
```



# Приложение Д

Разложение по эксцентрическим и облическим элементам  
функции  $W'$  до второй степени включительно

	$X$	$\bar{X}$	$X'$	$\bar{X}'$	$Y$	$\bar{Y}$	$Y'$	$\bar{Y}'$	$\Lambda$	$\Lambda'$
1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
1/2	1	0	0	0	0	0	0	0	-2	1
1/2	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-1
1/2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-2
1/2	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	2
-1/16	2	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
9/16	2	0	0	0	0	0	0	0	-3	1
-1/4	1	1	0	0	0	0	0	0	1	-1
-1/4	1	1	0	0	0	0	0	0	-1	1
1/2	1	0	0	1	0	0	0	0	-2	2
9/16	0	2	0	0	0	0	0	0	3	-1
-1/16	0	2	0	0	0	0	0	0	1	1
1/2	0	1	1	0	0	0	0	0	2	-2
9/16	0	0	2	0	0	0	0	0	1	-3
-1/16	0	0	2	0	0	0	0	0	-1	-1
-1/4	0	0	1	1	0	0	0	0	1	-1
-1/4	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	1
-1/16	0	0	0	2	0	0	0	0	1	1
9/16	0	0	0	2	0	0	0	0	-1	3
-1/2	0	0	0	0	2	0	0	0	-1	-1
-1/2	0	0	0	0	1	1	0	0	1	-1
-1/2	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	-1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	1
-1/2	0	0	0	0	0	2	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	-1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
-1/2	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	-1
-1/2	0	0	0	0	0	0	1	1	1	-1
-1/2	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	1
-1/2	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1